AYRIM UCHRAYDIGAN TENGLAMALAR, TENGLAMALAR SISTEMALARI VA ULARNI YECHISH USULLARI

Abduraxmonov Abror Akromovich
Yorboboyev Alisher Kamolovich
Shahrisabz “Temurbeklar maktabi” harbiy-akademik litseyi oʻqituvchilari

Annotatsiya. Ushbu maqolada nostandart tenglamalarni yechshni bazi xususiy usullari haqida soʻz boradi. Oʻquvchilar bu usullardan foydalangan holda nostandart tenglama va tenglamalar sistemasini yecha oladilar.
Kalit soʻzlar. Funksiya, koʻrsatkich, logarifm, parameter, argument.

1-misol. $\cos\left(\lg\left(2-3^{x^2}\right)\right)=3^{x^2}$ tenglamani yeching.

Yechilishi: Tenglamaning chap tomonidagi funksiyaning eng katta qiymati 1 va oʻng tomonidagi funksiyaning esa eng kichik qiymati 1 boʻla oladi, demak tenglama faqat shu holdagina yechimga ega boʻlishi mumkin, ya’ni $x=0$ da tenglik bajariladi va bu yagona yechim hisoblanadi.

Javob: $x=0$

2-misol. $2^{tg^2xy+ctg^2xy}=\frac{4}{\log_2(4x^2-4x+3)}$ tenglamani yeching.

Yechilishi: Tenglamaning chap tomonidagi ifodaning eng kichik qiymati 4 ga teng boʻladi, chunki $a^2+\frac{1}{a^2}\geq 2$ tengsizlikka koʻra chap tomondagi koʻrsatkichli funksiyaning koʻrsatkichini $tg^2xy+\frac{1}{tg^2xy}\geq 2$ (*) deyish mumkin.

Tenglamaning oʻng tomonini esa quyidagicha yozib olamiz: $\frac{4}{\log_2((2x-1)^2+2)}$ bundan koʻrinadiki $x=0{,}5$ da kasr eng katta 4 ga teng qiymatni qabul qiladi, chunki, kasr maxrajidagi logarifmik funksiya oʻsuvchi boʻlib, $x\neq 0{,}5$ da uning argumenti ikkidan katta boʻladi va logarifmning qiymati esa birdan katta boʻladi, natijada kasrning qiymati 4 dan kichiklashadi.

Endi yana (*) tengsizlikka e’tibor qilamiz, bunda tenglik belgisi bajarilishi uchun $tgxy=1$ boʻlishi kerak, ya’ni $xy=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\epsilon Z$ yoki $x=0{,}5$ ni e’tiborga olsak, $y=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z$ ga ega boʻlamiz.

Javob: $\left(0{,}5;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z\right)$

3-misol. $x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$ tenglamani yeching.

Yechilishi: Tenglamada $\sqrt{2}=a$ belgilash kiritib, quyidagi parametrik tenglamani hosil qilamiz:

$$x^3-(a+1)x^2+a^2=0$$

Yoki bundan a parametrga nisbatan kvadrat tenglamani hosil qilamiz va uni yechamiz:

$$a^2-x^2a+x^3-x^2=0$$

$$a_{1,2}=\frac{x^2\pm\sqrt{x^4-4x^3+4x^2}}{2}=\frac{x^2\pm(x^2-2x)}{2}\to a_1=x^2-x\ a_2=x$$

Endi *a* ning topilgan qiymatlarini belgilashimizga olib borib qo‘yamiz:

$x^2-x=\sqrt{2}$ va $x=\sqrt{2}$

Bulardan esa $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$, $x_3=\sqrt{2}$ yechimlarga ega bo‘lamiz.

Javob: $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$, $x_3=\sqrt{2}$

4-misol. $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}$ tenglamani yeching.

Yechilishi: Tenglamani yechishda $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ tenglikdan foydalanamiz:

$$\frac{3x^2-7x+3-3x^2+5x+1}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}=\frac{x^2-2-x^2+3x-4}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$$

$$\frac{4-2x}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}=\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$$

$x=2$ da tenglik bajarilishi ko‘rinib turibdi. Agar $x\neq 2$ bo‘lsa, tenglikning ikkala qismini $x-2$ ga qisqartirsak,

$\frac{-2}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}=\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$ ga ega bo‘lamiz.

Bu tenglik x ning hech qanday qiymatida bajarilmaydi, chunki tenglikning chap tomoni aniqlanish sohasida doim manfiy qiymatni, o‘ng tomoni esa musbat qiymatni qabul qiladi. Demak, tenglama yagona $x=2$ yechimga ega ekan.

Javob: $x=2$

5-misol. $\left|x+\sqrt{x+2}\right|=\left|1+2x+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}\right|-\left|\sqrt{x+3}+x+1\right|$ tenglamani yeching.

Yechilishi: Tenglamani yechishda a va b haqiqiy sonlar uchun $|a+b|=|a|+|b|$ tenglik,faqat $a\cdot b\geq 0$ shartda bajarilishidan foydalanamiz:

$$\left|x+\sqrt{x+2}\right|+\left|\sqrt{x+3}+x+1\right|=\left|1+2x+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}\right|$$

Ya’ni

$\begin{cases} x+\sqrt{x+2}\geq 0 \\ \sqrt{x+3}+x+1\geq 0\end{cases}$ va $\begin{cases} x+\sqrt{x+2}\leq 0 \\ \sqrt{x+3}+x+1\leq 0\end{cases}$ sistemalarni yechamiz.

Birinchi sistemadan $x\geq -1$ yechimni va ikkinchi sistemadan $x=-2$ yechimni olamiz, demak, berilgan tenglama yechimi $x\epsilon\{-2\}\cup[-1;\infty)$ bo‘lar ekan.

Javob: $x\epsilon\{-2\}\cup[-1;\infty)$

6-misol. $\begin{cases} x^3+y^3-3xy=13 \\ x^2+y^2-xy-x-y=6\end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechilishi: Sistemani yechish uchun ushbu $x^3+y^3+z^3-3xyz$ ko‘phadning ko‘paytuvchilaridan foydalanamiz:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$$

Tenglikda $z=1$ desak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$x^3+y^3+1^3-3\cdot x\cdot y\cdot 1=(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)$ (*)

Bunga ko'ra sistemaning ko'rinishini quyidagicha o'zgartirib olamiz:

$$\begin{cases} x^3+y^3+1-3xy=14 \\ x^2+y^2+1-xy-x-y=7 \end{cases}$$

Yoki yuqoridagi (*) tenglikni e'tiborga olsak,

$$\begin{cases} (x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)=14 \\ x^2+y^2+1-xy-x-y=7 \end{cases}$$

ni hosil qilamiz. Bu sistemaning birinchi tenglamasini ikkinchisiga bo'lib, $x+y+1=2$ yoki $y=1-x$ (**) ni olamiz. y ning bu qiymatini ikkinchi tenglamaga qo'yib, $x^2-x-2=0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamadan topilgan $x_1=2$ va $x_2=-1$ yechimlarni (**) ga qo'yib, $y_1=-1, y_2=2$ larga ega bo'lamiz.

Javob: (2;-1) va (-1;2)

7-misol. $4\log_4\left(6x^2+\frac{3}{8x^2}+13\right)=2cos\left(\frac{5\pi}{14+sin\pi x}\right)+7$ tenglamani yeching.

Yechilishi: Tenglamaning chap qismidagi funksiya argumentini Koshi tengsizligiga ko'ra baholaymiz:

$$6x^2+\frac{3}{8x^2}=2x^2+2x^2+2x^2+\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{8x^2}\geq$$

$$\geq 6\sqrt[6]{2x^2 2x^2 2x^2\frac{1}{8x^2}\frac{1}{8x^2}\frac{1}{8x^2}}=6\cdot\frac{1}{2}=3$$

Demak, $6x^2+\frac{3}{8x^2}+13\geq 16$ yoki $4\log_4\left(6x^2+\frac{3}{8x^2}+13\right)\geq 8$ (*) ekan.

Tenglamaning o'ng qismidagi funksiya argumentini baholaymiz:

$$-1\leq sin\pi x\leq 1\ \rightarrow \frac{\pi}{3}\leq\frac{5\pi}{14+sin\pi x}\leq\frac{5\pi}{13}$$

$y=cosx$ funksiyaning $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ kesmada kamayuvchi ekanligini e'tiborga olsak, $cos\left(\frac{5\pi}{14+sin\pi x}\right)\leq cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ yoki bunga ko'ra

$$2cos\left(\frac{5\pi}{14+sin\pi x}\right)+7\leq 8\ (**)$$

(*) va (**) dan ko'rinadiki tenglama faqat har ikki tomoni 8 ga teng bo'lgan holdagina yechimga ega bo'lar ekan.

Tenglamaning chap va o'ng tomonlari 8 ga teng bo'lishi uchun $\begin{cases} 2x^2=\frac{1}{8x^2} \\ sin\pi x=1 \end{cases}$ sistema bajarilishi kerak, ya'ni $x=\frac{1}{2}$ bo'lishi kerak.

Javob: $x=\frac{1}{2}$

8-misol. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=2\sqrt{(2x+3)(x+1)}+3x-16$ tenglamani yeching.

Yechilishi: Dastlab tenglama ko'rinishini quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=2\sqrt{(2x+3)(x+1)}+(2x+3)+(x+1)-20$$

va

$\sqrt{2x+3}=a$ va $\sqrt{x+1}=b$ (*)

belgilashlarni kiritamiz, natijada

$$a + b = 2ab + a^2 + b^2 - 20$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Oxirgi tenglamani $a + b$ ga nisbatan kvadrat tenglama deb olib, $a + b$=5 va $a + b = -4$ ifodalarga ega bo‘lamiz. a va b lar sifatida biz kvadrat ildizlarni belgilab olganimizni e’tiborga olsak, $a + b = -4$ bo‘lishi mumkin emas, demak, $a + b$ =5 (**)

Endi (*) tengliklardan x nomalumni yo‘qotib, $a^2 - 2b^2 = 1$ ifodaga ega bo‘lamiz,buni (**) bilan sistema qilib yechib, $a_1 = 3,\ b_1 = 2$ va $a_2 = 17,\ b_2 = -12$ larni topamiz. Topilganlarni belgilashlarga olib borib qo‘yib, faqat $x = 3$ yechim borligini aniqlaymiz.

Javob: $x = 3$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Matematikadan praktikum. H.A.Nasimov, D.D.To‘raqulov, J.H.Husanov Toshkent “Ilm ziyo” 2004.
2. Математика для старшеклассников Нестандартные методы решения задач В.П.Супрун Москва 2009.