

Date: 13th September-2026

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ.

Сюткина Светлана Михайловна

Преподаватель математики высшей категории академического лица
«International Business» Ташкентского государственного экономического
университета, город Ташкент, Узбекистан

Аннотация. В статье рассматриваются основные методы определения количества действительных корней уравнения без обязательного нахождения самих корней. Особое внимание уделяется исследованию функций, графическому методу, использованию производной, теоремы о промежуточном значении, дискриминанта, свойств монотонности и параметров. Приводятся сложные примеры, характерные для уровня академического лица, в которых количество корней определяется с помощью анализа поведения функции на различных промежутках. Показано, что исследование количества решений позволяет значительно упростить решение сложных алгебраических и трансцендентных уравнений.

Ключевые слова: уравнение, корень уравнения, количество корней, функция, график, монотонность, производная, экстремум, дискриминант, параметр, теорема о промежуточном значении, область определения.

В курсе алгебры решение уравнений обычно связывают с нахождением их корней. Однако в математике существует большое количество задач, в которых требуется определить не сами решения, а только **их количество**. Такая постановка особенно важна при исследовании уравнений, содержащих параметры, показательные и логарифмические функции, а также при изучении многочленов высокой степени.

Нахождение точных корней далеко не всегда является рациональным. Например, уравнение $x^5 - 5x + 1 = 0$ в общем случае не имеет простого способа решения в элементарных функциях. Тем не менее количество его действительных корней можно определить с помощью исследования соответствующей функции.

Основная идея заключается в переходе от уравнения к функции. Если уравнение имеет вид $f(x) = 0$, то его корни являются абсциссами точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox . Поэтому задача об определении количества корней превращается в задачу об исследовании поведения функции.

Цель данной статьи — рассмотреть основные методы определения количества действительных корней и показать их применение на сложных примерах.

1. Основные способы определения количества корней.

Количество корней уравнения можно определять различными способами. Выбор метода зависит от вида уравнения.

К наиболее распространённым методам относятся:

1. **графический метод** — определение количества точек пересечения графиков;



Date: 13th September-2026

2. **использование дискриминанта** — для квадратных уравнений;
3. **исследование монотонности функции**;
4. **использование производной и точек экстремума**;
5. **теорема о промежуточном значении**;
6. **исследование области определения**;
7. **методы работы с параметрами**;
8. **сочетание нескольких методов**.

На практике наиболее надёжным является комплексный подход: сначала определяется область допустимых значений, затем исследуется функция, находятся критические точки, определяется знак функции и устанавливается количество пересечений графика с осью абсцисс.

2. Графический смысл количества корней

Пусть дано уравнение $f(x) = g(x)$.

Его можно представить в виде $f(x) - g(x) = 0$.

Введём функцию $h(x) = f(x) - g(x)$.

Тогда количество корней исходного уравнения равно количеству нулей функции $h(x)$.

С геометрической точки зрения это означает, что количество корней равно количеству точек пересечения графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

Например, уравнение $\ln x = x - 2$ можно рассматривать как задачу о пересечении графиков функций $y = \ln x$ и $y = x - 2$. Однако для точного определения количества пересечений одного рисунка недостаточно. Необходимо исследовать функцию

$$h(x) = \ln x - x + 2, \quad x > 0.$$

Найдём производную: $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

При $0 < x < 1$ производная положительна, а при $x > 1$ — отрицательна. Следовательно, функция возрастает на $(0; 1)$ и убывает на $(1; \infty)$. Значит, $x = 1$ — точка максимума.

При этом $h(1) = \ln 1 - 1 + 2 = 1 > 0$.

Следовательно, функция сначала возрастает от отрицательных значений до положительного максимума, а затем снова убывает к отрицательным значениям. Поэтому график пересекает ось Ox ровно два раза.

Таким образом, уравнение $\ln x = x - 2$ имеет два действительных корня, хотя находить их точные значения необязательно.

3. Роль производной при определении количества корней.

Для учащихся академического лицея одним из наиболее эффективных инструментов является производная.

Если $f'(x) > 0$ на промежутке, то функция возрастает на этом промежутке. Если $f'(x) < 0$, то функция убывает.

Отсюда следует важный вывод: **строго монотонная функция может иметь не более одного корня на промежутке.**



Date: 13th September-2026

Однако функция может быть немонотонной на всей области определения. В таком случае производная позволяет разделить область определения на промежутки монотонности и исследовать каждый из них отдельно.

Рассмотрим более сложный пример.

Пример 1

Определить количество действительных корней уравнения

$$x^3 - 3x + a = 0 \text{ в зависимости от параметра } a.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 3x + a$.

Её производная: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$.

Критические точки: $x = -1$; $x = 1$.

На промежутке $(-\infty; -1)$ функция возрастает, на $(-1; 1)$ убывает, а на $(1; \infty)$ снова возрастает.

Вычислим значения в критических точках:

$$f(-1) = -1 + 3 + a = a + 2, \quad f(1) = 1 - 3 + a = a - 2.$$

Таким образом, положение локального максимума и минимума зависит от параметра a .

Чтобы график имел три пересечения с осью Ox , максимум должен находиться выше оси, а минимум — ниже: $a + 2 > 0$, $a - 2 < 0$.

Отсюда: $a > -2$, $a < 2$.

Следовательно, $-2 < a < 2$.

При этих значениях параметра уравнение имеет три действительных корня.

Если $a = 2$, то $f(1) = 0$.

В этом случае один из корней является точкой касания графика с осью Ox , а ещё один корень находится слева. Следовательно, имеется два различных действительных корня.

Аналогично при $a = -2$ также существуют два различных корня.

Если $a < -2$ или $a > 2$, экстремумы оказываются по одну сторону от оси Ox , поэтому график пересекает её только один раз.

Итак: при $-2 < a < 2$ уравнение имеет три действительных корня; при $a = \pm 2$ — два различных действительных корня, один из которых является кратным; при $a < -2$ или $a > 2$ — один действительный корень.

Этот пример показывает, насколько эффективно исследование производной при решении задач с параметрами.

4. Использование теоремы о промежуточном значении.

Для доказательства существования корня часто используется теорема о промежуточном значении.

Теорема. Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$ и значения $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, то существует хотя бы одно число $c \in (a; b)$, для которого $f(c) = 0$.

Однако важно понимать: смена знака гарантирует существование корня, но не всегда гарантирует его единственность.



Date: 13th September-2026

Чтобы доказать, что корень только один, необходимо дополнительно установить, например, строгую монотонность функции.

Пример 2

Определить количество действительных корней уравнения

$$x^5 - 5x + 1 = 0.$$

Пусть $f(x) = x^5 - 5x + 1$.

Найдём производную: $f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1)$.

Условие $f'(x) = 0$ даёт: $x^4 = 1$, откуда $x = \pm 1$.

Знак производной: при $|x| > 1$: $f'(x) > 0$; при $|x| < 1$: $f'(x) < 0$.

Следовательно, функция возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, а убывает на $(-1; 1)$.

Найдём значения функции в критических точках:

$$f(-1) = -1 + 5 + 1 = 5, \quad f(1) = 1 - 5 + 1 = -3.$$

Таким образом, локальный максимум положителен, а локальный минимум отрицателен.

Следовательно:

- на $(-\infty; -1)$ функция возрастает от $-\infty$ до 5, поэтому имеет один корень;
- на $(-1; 1)$ функция убывает от 5 до -3 , поэтому имеет один корень;
- на $(1; +\infty)$ функция возрастает от -3 до $+\infty$, поэтому имеет один корень.

Итого: 3 действительных корня.

При этом точные значения корней могут быть найдены только приближённо, но для определения их количества это не требуется.

5. Метод оценки знаков и экстремумов.

В сложных задачах важно не просто найти критические точки, а правильно оценить значения функции в них.

Рассмотрим, например, уравнение $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$.

Положим $t = x^2$, тогда получаем: $t^2 - 4t + 2 = 0$.

Дискриминант: $D = 16 - 8 = 8$. Следовательно, $t_1 = 2 - \sqrt{2}$, $t_2 = 2 + \sqrt{2}$.

Оба значения положительны. Каждому положительному значению t соответствуют два значения x : $x = \pm \sqrt{t}$.

Поэтому исходное уравнение имеет четыре действительных корня.

Этот пример показывает, что иногда количество корней удобно определять не через график и производную, а с помощью замены переменной и анализа ограничений на новую переменную.

6. Уравнения с параметром и графический подход.

Ещё один эффективный метод заключается в рассмотрении параметра как отдельной координаты.

Например, уравнение $x^2 - 2x + a = 0$ можно переписать как

$$a = -x^2 + 2x.$$



Date: 13th September-2026

Теперь количество корней определяется количеством пересечений параболы

$y = -x^2 + 2x$ с горизонтальной прямой $y = a$.

Парабола имеет вершину в точке $x = 1$, где $a = 1$.

Следовательно:

- при $a < 1$ прямая пересекает параболу в двух точках;
- при $a = 1$ касается её в одной точке;
- при $a > 1$ пересечений нет.

Таким образом:

- при $a < 1$ уравнение имеет 2 корня;
- при $a = 1$ уравнение имеет 1 корень;
- при $a > 1$ корней нет.

Этот способ особенно полезен в задачах, где параметр входит в уравнение достаточно просто.

7. Практический алгоритм.

Для определения количества корней сложного уравнения рекомендуется придерживаться следующего алгоритма.

1. Найти область определения.

Особенно важно это для дробных, логарифмических и иррациональных уравнений.

2. Преобразовать уравнение.

По возможности привести его к виду $f(x) = 0$.

3. Определить свойства функции.

Необходимо изучить её непрерывность, поведение на границах области определения и возможные симметрии.

4. Найти производную.

По знаку производной определить промежутки возрастания и убывания.

5. Найти критические точки и экстремумы.

6. **Определить знаки функции** в критических точках и на границах рассматриваемых промежутков.

7. **Использовать теорему о промежуточном значении**, если необходимо доказать существование корня.

8. **Подсчитать количество корней** на каждом промежутке и объединить полученные результаты.

Следует помнить, что один метод не всегда является достаточным. В сложных задачах чаще всего требуется сочетание производной, анализа знаков и теоремы о промежуточном значении.

Определение количества корней уравнения представляет собой самостоятельную математическую задачу, требующую не столько вычислительных навыков, сколько умения исследовать свойства функций.

Для простых квадратных уравнений достаточно использовать дискриминант. Для более сложных уравнений эффективны графический метод, исследование



Date: 13th September-2026

монотонности, производная и теорема о промежуточном значении. В задачах с параметрами количество корней определяется в зависимости от положения графика функции относительно оси абсцисс или от значений функции в точках экстремума.

Особую роль играет производная. Она позволяет определить характер изменения функции и разбить область определения на промежутки, на которых функция является монотонной. Если функция на таком промежутке строго возрастает или убывает, то она имеет там не более одного корня. Сочетание этого факта с оценкой значений функции позволяет точно установить количество решений.

Рассмотренные примеры показывают, что для определения количества корней необязательно находить сами корни. Во многих случаях достаточно построить качественный график или исследовать функцию аналитически. Такой подход особенно важен для уравнений высокой степени и трансцендентных уравнений, точное решение которых может быть затруднено.

Таким образом, умение определять количество корней является важной составляющей математической культуры учащегося академического лицея. Оно объединяет знания об уравнениях, функциях, производной, графиках и параметрах и формирует навык выбора наиболее эффективного метода решения.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Колмогоров А. Н., Абрамов А. М., Дудницын Ю. П. и др. Алгебра и начала анализа: учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Просвещение.
2. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы: учебник. — М.: Мнемозина.
3. Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач. — М.: Просвещение.
4. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: справочные материалы. — М.: Просвещение.
5. Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. — М.: МЦНМО.
6. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. — М.: Наука.
7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. — М.: Дрофа.