

Date: 1st October-2026

**KARRALI FURYE QATORLARI BILAN BO'LIQ UMUMLASHGAN
LOKALIZATSIYA HAQIDA BA'ZI TARIXIY MA'LUMOTLAR**

Zulfiqorova Maftuna Alisher qizi

Guliston davlat universiteti tadqiqotchisi

Annotatsiya: Mazkur ishda, yoyiluvchi funksiyaning tashuvchisi biror sohadan tashqarida bo'lsin degan shart asosida, aynan shu sohada ikki karrali Furiye qatorlarining elliptik qisman yig'indilar ketma-ketligini deyarli yaqinlashish masalasi o'rganilgan. Odatda bunday masala umumlashgan lokalizatsiya masalasi deb ataladi.

Kalit so'zlar: Furiye qatori, elliptik qisman yig'indi, umumlashgan lokalizatsiya, maksimal operator.

Ma'lumki, Luzin gipotezasi bir o'lchamli trigonometrik Furiye qatorlari uchun musbat yechimga ega, ammo ko'p o'lchamli holatda u karrali Furiye qatorlarining sferik qisman yig'indilari uchun hozirgacha o'z tasdig'ini topmagan. Tarixiy jihatdan Luzin gipotezasini hal qilishdagi siljishlar oddiyroq muammolarni ko'rib chiqish orqali amalga oshirilgan. Ushbu bandda sferik qisman yig'indilar uchun ana shunday muammolardan biri – silliq funksiyalarning karrali Furiye qatorlari uchun umumlashgan lokalizatsiya prinsipi ko'rib chiqiladi. Ushbu yo'nalishdagi ishlarning qisqacha sharhi berilgan, hal qilinmagan muammolar va yangi vazifalar shakllantirilgan.

Faraz qilaylik, $T^N = (-\pi; \pi]^N$, N -o'lchamli tor bo'lsin, $(-\pi; \pi]^N = \underbrace{(-\pi; \pi] \times (-\pi; \pi] \times \dots \times (-\pi; \pi]}_{N \text{ marta}}$.

$f \in L_2(T^N)$ funksiyasining Furiye qatorining sferik qisman yig'indilari quyidagi formula bo'yicha aniqlanadi:

$$S_\lambda f(x) = \sum_{|n|^2 < \lambda} f_n e^{inx} \quad (1)$$

bu yerda $n \in \mathbb{Z}^N$, Furiye koeffitsientlari $\{f_n\}$ esa quyidagi ko'rinishga ega:

$$f_n = (2\pi)^{-N} \int_{T^N} f(y) e^{-iny} dy$$

Furiye qatorlari nazariyasining sinfik muammolaridan biri $\lambda \rightarrow \infty$ da $S_\lambda f(x)$ ning f ga nuqtali yaqinlashish muammosidir. Ya'ni, f funksiyalarning qaysi sinflari uchun qisman yig'indilar berilgan nuqtada, deyarli hamma yerda, barcha nuqtalarda yoki tekis yaqinlashishini aniqlashdir.

Shuni ta'kidlash kerakki, hatto eng sodda $N=1$ va $p=2$ holatida ham, N.N.Luzinning $L_2(T^1)$ funksiyalari uchun trigonometrik Furiye qatorlarining deyarli hamma yerda yaqinlashishi haqidagi mashhur gipotezasi (1915-yilda e'lon qilingan) faqat 50 yildan ko'proq vaqt o'tgach, 1966-yilda Karleson tomonidan hal qilindi. Karleson usulini

Date: 1st October-2026

takomillashtirgan holda, nemis matematigi Xant ushbu natijani L_p , $p > 1$ sinflaridagi funksiyalar uchun kengaytirdi. Agar $p=1$ bo'lsa, 1922-yilda Kolmogorov tomonidan qurilgan, Furiye qatori T^1 ning hamma yerida uzoqlashuvchi bo'lgan $L_1(T^1)$ sinfidagi funksiyaning mashhur misoli tufayli bu tasdiq o'rinli emas.

Ko'p o'lchamli Furiye qatorlari uchun Karleson-Xant natijasining adolatli bo'lishi qisman yig'indilarning ko'rinishiga bog'liq. Masalan, N -karrali Furiye qatorining kvadrat qisman yig'indilari uchun Shelin Xant teoremasini kengaytirdi. Biroq, Fefferman ko'rsatganidek, to'g'ri to'rtburchaklar bo'yicha yaqinlashish mutlaqo yangi effektlarga olib keladi: shunday uzluksiz $f(x_1, x_2)$ funksiya mavjudki, uning Furiye qatori T^2 kvadratining har bir ichki nuqtasida to'g'ri to'rtburchaklar bo'yicha cheksiz uzoqlashadi.

Furiye qatorlarining yaqinlashishi masalalarini o'rganish muhim amaliy ahamiyatga ham ega. Agar davriy chegaraviy shartlarga ega T^N torida Δ – Laplas operatorini ko'rib chiqsak, uning xos funksiyalari $(2\pi)^{-N/2}e^{inx}$ ko'rinishida bo'ladi, xos qiymatlari esa $|n|^2$ ga tengdir. Furiye usulini, aytaylik, to'lqin tenglamasi uchun asoslashda, T^N sohasida berilgan ixtiyoriy f funksiyasini ko'rsatilgan xos funksiyalar sistemasi bo'yicha Furiye qatoriga yoyish vazifasi tabiiy ravishda yuzaga keladi. Bunday qator quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$S_\lambda f(x) = \sum_{|n|^2 < \lambda} f_n e^{inx}$$

bu esa karrali Furiye qatorlarining sferik qisman yig'indilari bilan mos keladi.

Rimanning klassik lokalizatsiya prinsipi shuni tasdiqlaydiki: agar funksiya integrallanuvchi bo'lib, biror intervalda nolga teng bo'lsa, u holda uning Furiye qatori ushbu intervaldagi ixtiyoriy kompakt to'plamda nolga tekis yaqinlashadi. Ikki yoki ko'p o'zgaruvchili funksiyalar holatida vaziyat o'zgaradi. Bu holda yetarlicha yuqori silliqlikka ega bo'lgan funksiyalar uchun ham sinfik lokalizatsiya prinsipi o'rinli bo'lmagan misollar mavjud [4]. Shu munosabat bilan, 1968-yilda V.A.Ilyin umumlashgan lokalizatsiya tushunchasini kiritdi [1]. Ushbu ta'rifni eslatib o'tamiz: agar biror $L_p(T^N)$ sinfiga tegishli va $G \subset T^N$ sohasida nolga teng bo'lgan har qanday f funksiya uchun karrali Furiye qatorlarining sferik qisman yig'indilari $S_\lambda f(x)$ deyarli hamma yerda G da nolga yaqinlashsa, u holda $L_p(T^N)$ sinfiga umumlashgan lokalizatsiya mavjud deyiladi. Ta'kidlash joizki, sinfik lokalizatsiyadan farqli o'laroq, umumlashgan lokalizatsiya adolatli bo'lishi uchun $S_\lambda f(x)$ ning G sohasida deyarli hamma yerda nolga yaqinlashishi yetarlidir.

Sferik qisman integrallar uchun $L_p(R^N)$ sinflarida umumlashgan lokalizatsiya prinsipi ko'plab mualliflar (Shelin P., Karberi A., Soriya F. va boshqalar) tomonidan o'rganilgan [6]. Xususan, [6] fundamental ishda quyidagi teorema isbotlangan.

1-teorema (Karberi va Soriya (1988)). Faraz qilaylik, $f \in L_p(R^N)$, $2 \leq p < \frac{2N}{N-1}$ va ochiq $\Omega \subset R^N$ sohasida $f=0$ shartlar o'rinli bo'lsin. U holda Ω sohasida deyarli hamma yerida:

$$E_\lambda f(x) = \int_{R^N} c(x-y, \lambda) f(y) dy = (2\pi)^{-N/2} \int_{|\xi|^2 < \lambda} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (2.3.4)$$

o‘rinlidir.

Avvalroq, kompakt tashuvchiga ega $f \in L_2(\mathbb{R}^N)$ funksiyalar uchun ushbu tasdiq Shelin [3] tomonidan olingan edi. [6] ishda taklif qilingan metod amalda qisman yig‘indilar ko‘rinishiga bog‘liq emas. Masalan, [4] ishda ushbu metod yordamida quyidagi natija isbotlangan:

2-teorema. Faraz qilaylik, $A(\xi)$ ixtiyoriy bir jinsli elliptik polinom bo‘lsin. Agar $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq p < \frac{2N}{N-1}$ bo‘lsa va ochiq $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sohasida $f=0$ bo‘lsa, u holda Ω da deyarli hamma yerda $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda f(x) = 0$ bo‘ladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy elliptik polinom orqali aniqlangan $E_\lambda(A)f(x)$ qisman integrallari uchun sferik yig‘indilar $E_\lambda f(x)$ bilan bir xil natija o‘rinli. Shuni ta’kidlash kerakki, umumlashgan lokalizatsiyadan farqli o‘laroq, sinfik Riman lokalizatsiyasini ta’minlovchi shartlar $\Omega_A = \{\xi \in \mathbb{R}^N: A(\xi) < 1\}$ sohasining geometriyasiga sezilarli darajada bog‘liq bo‘ladi. [3].

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. V.A.II’in. Generalized interpretation of the principle of localization for Fourier series in fundamental function systems, Siberian Math. J., 9:5 (1968), 812-820.
2. Sh.Alimov, R.Ashurov, A.Pulatov, Multiple Fourier series and Fourier integrals, in: Commutative Harmonic Analysis IV, Springer-Verlag, 1992, pp. 1–97.
3. Р.Р. Ашуров, Обобщенная локализация и суммируемость почти всюду кратных рядов и интегралов Фурье. Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 4 (2021). С. 634–653.
4. Ashurov, R.R., Ahmedov, A., Ahmad Rodzi b. Mahmud: The generalized localization for multiple Fourier integrals, J. Math. Anal. Appl., 371 832-841(2010).
5. Бастис А.Й. Обобщенная локализация для рядов Фурье по собственным функциям оператора Лапласа в классах L_p // Литов. мат. сб. – 1991. – 31. – С. 387–405.
6. Carbery and F. Soria, “Almost everywhere convergence of Fourier integrals for functions in Sobolev spaces, and an L2-localization principle,” Rev. Mat. Iberoam., 1988, 4, 319–337.
7. Г.Фихтенгольц. «Курс дифференциального и интегрального исчисления», Том I, II, III. Москва, «Физматлит», 2001.
8. G.Xudoyberganov, A.Vorisov, H.Mansurov. «Matematik analiz», 1-, 2-qism, Qarshi, «Nasaf», 2003.
9. Tao T. Analysis 1, 2. Hindustan Book Agency, India, 2014.
10. T.Azlarov, H.Mansurov, «Matematik analiz asoslari», Toshkent, O‘zMU nashriyoti, 2005.
11. К.Жамуратов, Д.Абдухалимов, «ПРОЕКТИВ ТЕКИСЛИК ВА ПРОЕКТИВ ТЕКИСЛИКНИНГ БИР ЖИНСЛИ КООРДИНАТАЛАРИ»

Date: 1st October-2026

Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №68-3 (том 2) (ноябрь, 2025), 334-344.

12. Жамуратов К., Умаров Х.Р., Холбоев С. Решение одной задачи теории фильтрации методом квазистационарного приближения. ГулДУ ахборотномаси, №2, 2016 йил, 9-13 бетлар.

13. Sa'dullaev, H.Mansurov, G.Xudoyberganov, A.Vorisov, R.G'ulomov «Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami», 1-, 2- tom, Toshkent, «O'zbekiston» – 1993, 1996.

14. Б.П.Демидович, «Сборник задач и упражнений по математическому анализу», Изд. 13-е, Москва, «ЧеРо», 1997.

15. Жамуратов, К., Умаров, Х. Р., & Турдимуродов, Э. М. (2024). *О решении методом регуляризации одной системы функциональных уравнений с дифференциальным оператором* (Doctoral dissertation, Белорусско-Российский университет)

16. Umarov, K.R. (2025). Methods For Construction Of The Zhegalkin Polynomial. *TLEP–International Journal of Multidiscipline*, 2(5), 76-79.

17. Umarov, X., & Goyibnazarov, K. (2025, October). Some Principles Of Creative Training And Education Of Modern Youth. In *International Conference on Global Trends and Innovations in Multidisciplinary Research* (Vol. 1, No. 4, pp. 91-93).

18. Goyibnazarov, K., & Umarov, X. (2025, October). Biological Applications Of The Definite Integral. In *International Conference on Global Trends and Innovations in Multidisciplinary Research* (Vol. 1, No. 4, pp. 84-87).

19. Narjigitov, X., Umarov, X. R., & Kuchkarova, S. I. (2026). CHIZIQLI INTEGRAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI TARIXI HAQIDA. *SHOKH LIBRARY*, 1(1).

20. Umarov X.R., Abduraximova D.D. “МАТЕМАТИКАДАН ОЛИМПИАДА MASALALARINI YECHISHDA МАТЕМАТИК АНАЛИЗ МЕТОДЛАРИДАН FOYDALANISH” / Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №68 (том 2) (январь, 2025). Дата выхода в свет: 31.01.2025. с. 68-74.

21. Umarov X.R., Asqarbekova D.J. // “НАТУРАЛ СОНЛАР ҚАТОРИ ДАРАЖАЛАРИ ЙИҒИНДИСИНИ ТОПИШНИНГ БИР УСУЛИ” Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №68 (том 2) (январь, 2025). Дата выхода в свет: 31.01.2025. с. 74-84.

22. Umarov X.R., Erkinov Sh.B. // “YIG'INDI VA KO'PAYTMALARNI HISOBLASHDA KOMPLEKS АНАЛИЗ МЕТОДЛАРИДАН FOYDALANISH” Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №68 (том 2) (январь, 2025). с. 84-103.



Date: 1st October-2026

23. Наржигитов Х., Умаров Х. «биологические приложения определенного интеграл» “Raqamli texnologiyalar va sun’iy intellektni rivojlantirishning zamonaviy holati va istiqbollari” mavzusida ilmiy-amaliy anjumani materiallari to‘plami – Guliston, 2022 y.

24. Умаров Х.Р., Эгамбердиева С.Н. АЙРИМ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШДА ЧЕГИРМАЛАР НАЗАРИЯСИДАН ФОЙДАЛАНИШ. Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025). стр. 161-177.

25. Umarov X.R., Abdurasulov O.U. O‘LCHOVLI FUNKSIYALAR FAZOSI UCHUN DUALLIK PRINSIPI Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025). стр. 178-188.

26. Х.Умаров, З.Олимов. КЕТМА-КЕТЛИКЛАР 1^o ФАЗОСИДАГИ ФУНКЦИОНАЛЛАРНИНГ УМУМИЙ КЎРИНИШИ. Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025) Стр. 189-193.

27. Умаров Х.Р., Райимкулова К.Б. Турли N -функциялар аниқлаган Орлич фазоларини таққослаш. Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №68-3 (том 2) (ноябрь, 2025). стр. 482-487.

28. Умаров Х.Р., Маматкаримова М.И. КОШИ ТЕНГСИЗЛИГИ ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИ. Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №68-3 (том 2) (ноябрь, 2025). с. 477-481.

29. X.Narjigitov, X.R.Umarov, S.I.Kuchkarova, & Worldly Knowledge Publishing Centre. (2026). CHIZIQLI INTEGRAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI TARIXI HAQIDA. В ILMIY TADQIQOTLAR VA ULARNING YECHIMLARI (Т.9, Выпуск 01, сс. 219–223). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.18227815>.

