

Date: 7th September-2026

О ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДАХ, У КОТОРЫХ ОБЪЁМ РАВЕН ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ.

Сюткина Светлана Михайловна

Преподаватель математики высшей категории академического лица
«International Business» Ташкентского государственного экономического
университета, город Ташкент, Узбекистан

Аннотация. В статье исследуется класс прямоугольных параллелепипедов, у которых численные значения объёма и площади полной поверхности совпадают. Рассматривается вывод основного уравнения задачи, исследуются случаи куба и прямоугольных параллелепипедов с двумя равными рёбрами, приводятся примеры тел с целочисленными измерениями. Показано, что рассматриваемая задача позволяет установить связь между геометрическими формулами и алгебраическими преобразованиями, а также создать условия для развития исследовательского и логического мышления обучающихся. Особое внимание уделяется последовательному преобразованию исходного геометрического условия в алгебраическое уравнение и обратной геометрической интерпретации полученных результатов.

Ключевые слова: прямоугольный параллелепипед, объём, площадь поверхности, стереометрия, геометрия, алгебраическое уравнение, целочисленные решения, исследовательская задача, математическое мышление.

В школьном курсе стереометрии прямоугольный параллелепипед является одной из базовых пространственных фигур. Формулы его объёма и площади полной поверхности относятся к числу фундаментальных формул, которые используются при решении большого количества практических и теоретических задач. Обычно эти величины рассматриваются независимо: объём характеризует вместимость тела, а площадь поверхности — размер его внешней границы.

Вместе с тем интерес представляют задачи, в которых известные формулы необходимо не просто применить, а связать между собой. Одной из таких задач является исследование прямоугольных параллелепипедов, у которых численное значение объёма совпадает с численным значением площади полной поверхности.

Здесь необходимо сделать важное уточнение. Объём и площадь имеют разные физические размерности: объём измеряется в кубических единицах, а площадь — в квадратных. Поэтому речь идёт именно о **совпадении численных значений** этих величин при использовании одной и той же единицы длины.

Возникает естественный вопрос: **существуют ли прямоугольные параллелепипеды, для которых численное значение объёма равно численному значению площади полной поверхности?**

Если такие параллелепипеды существуют, то можно поставить более интересные вопросы: сколько их, можно ли найти среди них тела с целочисленными



Date: 7th September-2026

измерениями, существуют ли некубические примеры и как построить все такие параллелепипеды?

1. Составление основного уравнения

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, длины трёх рёбер которого обозначим через a, b и c . Все величины a, b и c положительны.

Объём прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле: $V = abc$.

Площадь его полной поверхности равна сумме площадей шести граней:

$$S = 2ab + 2bc + 2ac = 2(ab + bc + ac).$$

По условию численные значения объёма и площади поверхности равны. Поэтому имеем:

$$V = S.$$

Подставим вместо V и S соответствующие формулы:

$$abc = 2(ab + bc + ac).$$

Раскроем скобки: $abc = 2ab + 2bc + 2ac$.

Это и есть основное уравнение рассматриваемой задачи.

Теперь преобразуем его так, чтобы выразить одно из рёбер через два других.

Перенесём слагаемые, содержащие c , в левую часть:

$$abc - 2bc - 2ac = 2ab.$$

В левой части во всех трёх слагаемых присутствует c . Вынесем его за скобки:

$$c(ab - 2b - 2a) = 2ab.$$

Следовательно,

$$c = \frac{2ab}{ab - 2a - 2b}$$

Полученная формула имеет большое значение для дальнейшего исследования. Она показывает, что, выбрав два ребра a и b , можно определить третье ребро c .

Однако необходимо, чтобы c было положительным. Поэтому знаменатель дроби должен быть положительным: $ab - 2a - 2b > 0$.

Итак, условие существования такого параллелепипеда можно записать следующим образом: $ab > 2a + 2b$

Таким образом, исходная геометрическая задача преобразуется в задачу об исследовании положительных чисел.

2. Самый простой пример — куб.

Начнём с частного случая, когда все три ребра равны.

Пусть $a = b = c = x$. Тогда объём куба равен: $V = x^3$.

Площадь полной поверхности куба равна: $S = 6x^2$.

По условию эти величины имеют одинаковые численные значения: $x^3 = 6x^2$.

Поскольку $x > 0$, разделим обе части уравнения на x^2 : $x = 6$.

Следовательно, существует куб с ребром 6.

Таким образом, куб со стороной 6 является простейшим представителем рассматриваемого класса тел.

3. Существуют ли некубические параллелепипеды?



Date: 7th September-2026

Следующий естественный вопрос состоит в том, существуют ли прямоугольные параллелепипеды, не являющиеся кубами, но обладающие тем же свойством.

Для ответа рассмотрим случай, когда два ребра равны: $a = b = x$. Третье ребро обозначим через y : $c = y$.

Тогда объём равен: $V = x^2 y$. Площадь полной поверхности равна: $S = 2(x^2 + xy + xy)$.

Так как два последних слагаемых одинаковы, получаем: $S = 2(x^2 + 2xy)$.

По условию: $x^2 y = 2(x^2 + 2xy)$.

Раскроем скобки: $x^2 y = 2x^2 + 4xy$. Разделим обе части на x , поскольку $x > 0$:

$$xy = 2x + 4y$$

$$xy - 4y = 2x; \quad y(x - 4) = 2x. \quad \text{Отсюда получаем: } y = \frac{2x}{x-4}.$$

Чтобы длина y была положительной, необходимо: $x > 4$.

Следовательно, при любом $x > 4$ можно построить прямоугольный параллелепипед с рёбрами $x; x; \frac{2x}{x-4}$, у которого численные значения объёма и площади поверхности совпадают.

Это означает, что таких параллелепипедов существует бесконечно много.

4. Пример некубического параллелепипеда.

Выберем в полученной формуле простое значение: $x = 8$.

Тогда третье ребро равно: $y = 4$.

Следовательно, получаем прямоугольный параллелепипед с измерениями: 8; 8; 4.

Проверим условие. Его объём: $V = 8 \cdot 8 \cdot 4 = 256$.

Площадь полной поверхности: $S = 2(8 \cdot 8 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 4) = 256$.

Таким образом, $V = S = 256$.

Полученный параллелепипед не является кубом, поскольку его измерения различны.

Тем самым мы доказали, что искомые тела не ограничиваются только кубами.

5. Параллелепипед с целыми рёбрами

Особенно интересна задача поиска прямоугольного параллелепипеда, у которого все три измерения являются целыми числами.

Рассмотрим уже полученную формулу: $c = \frac{2ab}{ab-2a-2b}$

Нужно подобрать такие целые положительные a и b , чтобы значение c также было целым.

Попробуем взять: $a = 4, b = 6$. Тогда $c = 12$

Таким образом, получаем параллелепипед с измерениями: 4; 6; 12.

Проверим его. Объём: $V = 4 \cdot 6 \cdot 12 = 288$.

Площадь поверхности: $S = 2(4 \cdot 6 + 6 \cdot 12 + 4 \cdot 12) = 288$. Итак, $V = S = 288$.

Date: 7th September-2026

Получен пример прямоугольного параллелепипеда с целыми измерениями, не являющегося кубом.

6. Ещё один способ получения таких параллелепипедов

Рассмотрим исходное условие: $abc = 2(ab + bc + ac)$.

Разделим обе части на abc . Поскольку все три ребра положительны, это допустимо:

$$\frac{abc}{abc} = \frac{2ab}{abc} + \frac{2bc}{abc} + \frac{2ac}{abc}.$$

После сокращения получаем: $1 = \frac{2}{c} + \frac{2}{a} + \frac{2}{b}$

Разделим обе части на 2: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$

Полученное равенство является ещё одной удобной формой условия.

Оно позволяет быстро проверять найденные примеры. Например, для параллелепипеда с измерениями 4; 6; 12: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$.

Следовательно, условие выполняется.

Интересно, что эта запись позволяет искать новые примеры уже не только геометрическими, но и арифметическими методами.

7. Значение задачи для обучения математике.

Рассмотренная задача обладает значительным методическим потенциалом. Она начинается с простых и хорошо известных формул:

$$V = abc \quad \text{и} \quad S = 2(ab + bc + ac),$$

но приводит к достаточно содержательному математическому исследованию.

При работе над задачей обучающиеся выполняют несколько последовательных действий:

- переводят геометрическое условие на язык алгебры;
- составляют уравнение;
- преобразуют уравнение;
- исследуют условия существования положительного решения;
- рассматривают частные случаи;
- находят конкретные примеры;
- проверяют полученные результаты;
- формулируют общий вывод.

Особенно важно, что задача допускает естественное продолжение исследования. Например, можно предложить обучающимся самостоятельно найти:

1. ещё один параллелепипед с целыми рёбрами;
2. параллелепипед, у которого одно ребро равно 5;
3. параллелепипед с двумя равными рёбрами;
4. все возможные значения третьего ребра при заданных a и b .

Такие задания переводят обучающегося из позиции пассивного применения формул в позицию исследователя.



Date: 7th September-2026

В результате исследования установлено, что существует бесконечно много прямоугольных параллелепипедов, у которых численные значения объёма и площади полной поверхности совпадают.

Таким образом, задача о равенстве численных значений объёма и площади поверхности представляет интерес не только как задача по стереометрии. Она демонстрирует тесную связь геометрии и алгебры, формирует навыки преобразования математических выражений, развивает исследовательское и логическое мышление и может быть использована для организации поисковой деятельности обучающихся.

Рассматриваемый пример показывает, что даже известные школьные формулы могут стать отправной точкой для более глубокого математического исследования, если предложить обучающимся не только найти ответ, но и выяснить, **сколько существует решений, как их получать и какие закономерности объединяют найденные объекты.**

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия. 10–11 классы: учебник для общеобразовательных организаций. М.: Просвещение, 2020.
2. Погорелов А. В. Геометрия: учебник для 7–11 классов средней школы. М.: Просвещение, 2019.
3. Пойа Д. Как решать задачу. М.: Учебно-методический центр «Школа», 2004.

