

Date: 7th October-2026

KOSHI VA GILBERT YADROLI SINGULYAR INTEGRALLARNI
TAQRIBIY HISOBLASHNING OPTIMAL KVADRATUR FORMULALARI

Sherzod Abdusalomov

Farg'ona davlat texnika universiteti, Farg'ona, O'zbekiston;

sherzodabdusalomov268@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu tezisda amaliy matematika va aerodinamikada ko'p uchraydigan Koshi bosh qiymat ma'nosidagi singulyar integrallar hamda Gilbert integrallarini taqribiy hisoblash masalasi tadqiq qilingan. Funksiyaning Gyolder shartini qanoatlantirishi asosida Koshi integrallarining mavjudligi tahlil qilinib, davriy funksiyalar sinfida trigonometrik ko'phadlar va Furrye koeffitsiyentlari yordamida Gilbert yadroli singulyar integrallar uchun kvadratur formula qurilgan hamda uning qoldiq hadi uchun aniq asimptotik baho olingan.

Kalit so'zlar: Singulyar integral, Koshi bosh qiymati, Gilbert almashtirishi, Gyolder sharti, kvadratur formula, Furrye koeffitsiyentlari, qoldiq had bahosi.

1. Koshi bosh qiymat ma'nosidagi singulyar integrallar

Amaliy masalalarda, xususan, aerodinamika modellarida quyidagi ko'rinishdagi maxsuslikka ega integrallar uchraydi:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-c)^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$\alpha = 1$ bo'lganda integral xosmas ma'noda mavjud bo'lmaydi va uni Koshi bo'yicha bosh qiymat (valeur principale — V. p.) ma'nosida qarash lozim:

$$V. p. \int_a^b f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(t) dt + \int_{c+\varepsilon}^b f(t) dt \right]$$

Masalan, $f(x) = \frac{1}{x-c}$ funksiya uchun:

$$V. p. \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a}$$

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $x_1, x_2 \in [a, b]$ nuqtalar uchun $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|^\alpha$ ($L > 0, 0 < \alpha \leq 1$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya Gyolder shartini qanoatlantiradi deyiladi.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda Gyolder shartini qanoatlantirsa, u holda Koshi yadroli singulyar integral bosh qiymat ma'nosida mavjud bo'ladi:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x-y} dx = \int_a^b \frac{f(x) - f(y)}{x-y} dx + f(y) \ln \frac{b-y}{y-a}, \quad y \in (a, b)$$

2. Gilbert yadroli singulyar integrallar uchun kvadratur formula

Quyidagi Gilbert integralini ko'rib chiqamiz:

Date: 7th October-2026

$$I(f; y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} dx$$

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya davriy bo'lib, uning Furiye koeffitsiyentlari $|c_n| \leq \frac{C}{|n|^\alpha}$ ($n \neq 0, \alpha > 1$) shartni qanoatlantirsin. $f(x)$ funksiyani trigonometrik interpolatsion ko'phad bilan approksimatsiyalaymiz:

$$P_N(x) = \sum_{m=-N+1}^{N-1} C_m e^{imx}, \quad C_m = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} f\left(\frac{k\pi}{N}\right) e^{-im\frac{k\pi}{N}}$$

Bu holda Gilbert integrali uchun quyidagi kvadratur formula hosil bo'ladi:

$$I(f; y) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} f\left(\frac{k\pi}{N}\right) \psi\left(y - \frac{k\pi}{N}\right) + R_N(y)$$

2-teorema. Agar $f(x)$ funksiyaning Furiye koeffitsiyentlari $|c_n| \leq \frac{C}{|n|^\alpha}$ shartni qanoatlantirsa va $\alpha > 1$ bo'lsa, u holda kvadratur formulaning qoldiq hadi uchun quyidagi baho o'rinlidir:

$$\max_{0 \leq y \leq 2\pi} |R_N(y)| \leq \frac{4C}{\alpha - 1} N^{1-\alpha}$$

XULOSA

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, Furiye koeffitsiyentlarining kamayish tartibi $\alpha > 1$ bo'lganda, taklif etilgan kvadratur formulaning qoldiq hadi tugunlar soni N ortishi bilan $O(N^{1-\alpha})$ tezlikda nolga intiladi. Ushbu usul Gilbert va Koshi tipli singulyar integral tenglamalarni sonli yechishda yuqori aniqlik va hisoblash barqarorligini ta'minlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Шадиметов Х.М., Далиев Б.С. Экстремальная функция квадратурных формул для приближенного решения обобщенного интегрального уравнения Абеля // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2019, №2(20), с. 88–95.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974. — 808 с.
3. Shadimetov Kh.M., Daliyev B.S. Composite optimal formulas for approximate integration of weight integrals // AIP Conference Proceedings, 2020.