

Date: 17th September-2026

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ В ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ.

Сюткина Светлана Михайловна

Преподаватель математики высшей категории академического лица
«International Business» Ташкентского государственного экономического
университета, город Ташкент, Узбекистан

Аннотация. В статье рассматривается применение производной как дополнительного инструмента при доказательстве и преобразовании математических тождеств. Показано, что производная позволяет не только исследовать функции на монотонность и экстремумы, но и устанавливать постоянство разности двух выражений. На этой основе можно доказывать некоторые алгебраические, показательные, логарифмические и тригонометрические тождества. Приведены примеры, соответствующие уровню подготовки учащихся академического лица.

Ключевые слова: производная, функция, тождество, тождественные преобразования, дифференцирование, постоянная функция, тригонометрические тождества, логарифм.

Тождественные преобразования занимают важное место в школьном курсе математики. Под тождественным преобразованием понимают замену одного выражения другим, тождественно равным ему при всех допустимых значениях переменных. Такие преобразования используются при упрощении выражений, решении уравнений и неравенств, исследовании функций и доказательстве математических утверждений.

Обычно тождества доказывают с помощью известных формул и алгебраических преобразований: раскрытия скобок, разложения на множители, приведения подобных слагаемых, применения формул сокращённого умножения и тригонометрических формул. Однако в некоторых случаях традиционное преобразование оказывается достаточно громоздким. Тогда полезным дополнительным методом становится применение производной.

Производная позволяет установить, является ли функция постоянной. Если на некотором промежутке производная функции равна нулю, то функция постоянна на этом промежутке. Именно это свойство лежит в основе метода доказательства тождеств с помощью производной.

1. Производная и постоянство функции.

Пусть необходимо доказать тождество $f(x) = g(x)$.

Вместо непосредственного преобразования обеих частей можно рассмотреть функцию

$$F(x) = f(x) - g(x).$$



Date: 17th September-2026

Если удаётся показать, что $F'(x) = 0$ на рассматриваемом промежутке, то функция $F(x)$ является постоянной. Следовательно, $F(x) = C$, где C — некоторое постоянное число.

Чтобы доказать исходное тождество, достаточно дополнительно найти значение $F(x)$ хотя бы в одной точке. Если, например, $F(x_0) = 0$, то $C = 0$, а значит, $F(x) = 0$ для всех допустимых x . Следовательно, $f(x) = g(x)$. Таким образом, общий алгоритм можно представить следующим образом:

1. Перенести одну часть предполагаемого тождества в другую.
2. Рассмотреть разность полученных выражений как функцию.
3. Найти её производную.
4. Если производная равна нулю, сделать вывод о постоянстве функции.
5. Найти значение функции в удобной точке.
6. Получить исходное тождество.

Этот подход особенно удобен тогда, когда производные левой и правой частей имеют одинаковый вид.

2. Пример доказательства алгебраического тождества

Рассмотрим тождество $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

Обычно оно доказывается непосредственным раскрытием скобок. Но рассмотрим его с точки зрения производной.

Пусть $F(x) = (x + 1)^3 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$.

Найдём производную: $F'(x) = 3(x + 1)^2 - (3x^2 + 6x + 3)$.

Раскроем квадрат: $3(x + 1)^2 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3x^2 + 6x + 3$.

Поэтому $F'(x) = 0$.

Следовательно, $F(x)$ — постоянная функция.

Найдём её значение при $x = 0$: $F(0) = 1 - 1 = 0$.

Таким образом, $F(x) = 0$, то есть $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

В данном примере производная не является самым коротким способом доказательства. Однако он демонстрирует принцип, который становится значительно полезнее при более сложных выражениях.

3. Применение производной к тригонометрическим тождествам.

Особенно наглядно метод проявляется при доказательстве тригонометрических тождеств. Рассмотрим известное тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Обозначим $F(x) = \sin^2 x + \cos^2 x - 1$.

Используя правило дифференцирования сложной функции, получаем:

$$F'(x) = 2\sin x \cdot \cos x - 2\cos x \cdot \sin x = 0.$$

Следовательно, $F(x) = C$.

Чтобы определить постоянную C , подставим $x = 0$:

$$F(0) = \sin^2 0 + \cos^2 0 - 1 = 0 + 1 - 1 = 0.$$

Значит, $C = 0$, и поэтому $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.



Date: 17th September-2026

Таким образом, фундаментальное тригонометрическое тождество можно получить не только из геометрических соображений или преобразований, но и используя производную.

4. Применение производной к показательно-логарифмическим тождествам.

Метод производной удобен и при работе с функциями, содержащими логарифмы и степени.

Рассмотрим тождество $\ln x^a = a \cdot \ln x$, где $x > 0$, а a — постоянное число.

Введём функцию $F(x) = \ln x^a - a \cdot \ln x$.

При $x > 0$ имеем $F'(x) = \frac{1}{x^a} \cdot a \cdot x^{a-1} - a \cdot \frac{1}{x} = 0$.

Следовательно, $F(x) = C$.

Возьмём $x = 1$:

$F(1) = \ln 1^a - a \cdot \ln 1 = 0$. Поэтому $C = 0$, и $\ln x^a = a \cdot \ln x$

Данный пример показывает, что производная может служить способом доказательства тождеств, которые традиционно выводятся из свойств логарифмов.

5. Почему этот метод важен?

Главное достоинство применения производной заключается в том, что она позволяет заменить сложное преобразование выражений исследованием одной функции. Если две части предполагаемого тождества имеют одинаковые производные, их разность является постоянной.

В общем случае, если $f'(x) = g'(x)$ на некотором промежутке, то

$$f(x) - g(x) = C.$$

Если хотя бы в одной точке x_0

$$f(x_0) = g(x_0),$$

то $C = 0$, и поэтому $f(x) = g(x)$ на всём рассматриваемом промежутке.

Этот факт можно рассматривать как своеобразный «обратный» способ использования производной. Обычно производную находят для заданной функции. Здесь же по совпадению производных делают вывод о связи между двумя функциями.

Следует отметить, что тождественные преобразования являются важной частью математического образования: они используются не только при преобразовании выражений, но и при решении уравнений, неравенств и исследовании функций.

Производная является не только средством исследования поведения функций, но и эффективным инструментом доказательства математических тождеств. Основная идея метода состоит в рассмотрении разности двух частей тождества как функции. Если производная этой функции равна нулю, то разность постоянна. Значение постоянной можно определить подстановкой удобного значения аргумента.

Применение данного метода особенно полезно при доказательстве тригонометрических, показательных и логарифмических тождеств. Он позволяет



Date: 17th September-2026

увидеть связь между двумя важными разделами математики — тождественными преобразованиями и дифференциальным исчислением.

Для учащихся академического лицея этот способ представляет интерес не только как практический приём, но и как пример более глубокого понимания производной. Он показывает, что производная может использоваться не только для нахождения экстремумов или исследования монотонности, но и для установления точных равенств между функциями.

Таким образом, применение производной в тождественных преобразованиях расширяет стандартный набор методов решения математических задач и формирует более целостное представление о взаимосвязи различных разделов математики.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Башмаков М. И. Математика: учебник для студентов учреждений среднего профессионального образования. — М.: Академия.
2. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. — М.: Просвещение.
3. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. — М.: Мнемозина.
4. Колмогоров А. Н., Абрамов А. М., Дудницын Ю. П. и др. Алгебра и начала анализа: учебник для 10–11 классов. — М.: Просвещение.

